

Faculté des Sciences et Techniques de Tanger

Epreuve d'analyse, second semestre 2007-2008

Jeudi 05 Juin 2008 de 9h à 12h

Dates importantes :

Résultats Lundi 09 Juin 2008 à 16h15min

Examen de rattrapage le 18 Juin 2008 à 10h

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

- ✓ 1.) Déterminer a et b pour que l'on ait l'égalité

$$\frac{-2x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

- ✓ 2.) Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 3x + 2)y' + 2xy = (x - 1)^3$

- ✓ 3.) Soit l'équation différentielle $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1 - 3e^{2x}$ (E)

- ✓ a. De quel type est cette équation ? Résoudre l'équation sans second membre associée à (E).

- ✓ b. Trouver une solution particulière de (E)

- ✓ c. Trouver la solution générale de (E)

Exercice 2 :

- ✓ Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}}$ (on ne demande pas de la calculer)

Exercice 3 :

- ✓ Pour tout $n \in \mathbb{R}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$

1. Pour quelles valeurs de n , I_n est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

- ✓ 3. Calculer I_1 et en déduire I_n en fonction de n

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - \arctan(2x)$

- ✓ 1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .

- ✓ 2. Etudier la parité de f .

- ✓ 3. Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- ✓ 4. Montrer qu'il existe au moins trois racines de l'équation $f(x) = 0$ dans D_f . On ne demande pas de calculer ses racines.

5. Calculer la dérivée f' de f . Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et comparer cette limite à $f'(0)$.

6. Donner le tableau de variation de f .

- ✓ 7. Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan 2x + \arctan \frac{1}{2x} = \frac{\pi}{2}$.

8. En utilisant les développements limités, déterminer les droites asymptotes au graphe de f et préciser la position du graphe de f par rapport à ces droites.

Exercice 2 Nature de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} dt$

• Au voisinage de $+\infty$: $\sqrt{t+t^2} \sim t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ c.v $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} dt$ c.v ($\alpha=2>1$)

• ~~Au voisinage de 0~~ : $\sqrt{t+t^2} = \sqrt{t}(1+t\sqrt{t}) \sim \sqrt{t} = t^{1/2}$

et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$ c.v $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} dt$ c.v ($\alpha=1/2 < 1$)

Ainsi I converge

Exercice 3

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$

1/ $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$

• $x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ existe

• Au voisinage de $+\infty$: $\frac{1}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{(1+x^3)^n} \sim \frac{1}{x^{3n}}$

$n > 1 \Leftrightarrow 3n > 3 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}} dx$ c.v $\Leftrightarrow 3n > 1 \Leftrightarrow n > 1/3 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ c.v si $n > 1/3$

2/ $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{(1+x^3)^n} = (1+x^3)^{-n} \\ u' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -n(3x^2)(1+x^3)^{-n-1} \\ v = x \end{cases}$

$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^3)^n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-3nx^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx = 3n \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx = 3n \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3-n}{(1+x^3)^{n+1}} dx$

d'où $I_n = 3n \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} \right) \Rightarrow I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$

Ainsi $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$

3/ $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2-x+1} = \dots \rightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}$

$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right) \right]_0^{+\infty}$

$= \left[\ln|x+1|^{1/3} + \ln|x^2-x+1|^{-1/6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{+\infty}$

$= \left[\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)^{1/6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{+\infty} = \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

• On a : $I_n = \frac{3n-2}{3n-3} I_{n-1}$
 $I_{n-1} = \frac{3n-4}{3n-5} I_{n-2}$
 \vdots
 $I_3 = \frac{5}{6} I_2$
 $I_2 = \frac{4}{3} I_1$

$\Rightarrow I_n = \frac{4 \times 7 \times \dots \times (3n-5)(3n-2)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n-6)(3n-3)} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

Exercice 6

- 1/ $D_f = \mathbb{R}$ 2/ f impaire : $f(-n) = -n + \text{Arctan}(-2n) = -n + \text{Arctan}(2n) = -f(n)$
- 3/ $f(0) = 0$; $f(1/2) = 1/2 - \text{Arctan} 1 = 1/2 - \pi/4 = \frac{2-\pi}{4}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty - (\pi/2) = +\infty$
- 4/ $f(0) = 0$ donc $x_1 = 0$ est solution de l'eq $f(x) = 0$
 $\cdot f(1/2) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$; $\exists x_2 \in]1/2, +\infty[$ / $f(x_2) = 0$
 $\cdot f$ est impaire donc $f(-x_2) = -f(x_2) = 0$
- 5/ $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+4x^2} = \frac{4x^2-1}{4x^2+1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\text{Arctan } 2x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2x}{1+4x^2} = -1$
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$
- 6/ f' a le signe de $4x^2 - 1$;
- | | | | |
|----|---|-------------------|-----------|
| x | 0 | 1/2 | + |
| f' | - | 0 | + |
| f | 0 | $\frac{2-\pi}{4}$ | $+\infty$ |
- 7/ on pose $h(x) = \text{arctan } 2x + \text{Arctan } \frac{1}{2x}$ sur $]0, +\infty[$
 $h'(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{-\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{4x^2}} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = 0 \Rightarrow h$ est constante sur $]0, +\infty[$
 d'où $\forall x \in]0, +\infty[$ $h(x) = c$ et $c = h(1/2) = \text{Arctan } 1 + \text{Arctan } 2 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$
- 8/ $f(x) = x - \text{arctan } 2x = x - (\pi/2 - \text{Arctan } \frac{1}{2x}) = x - \pi/2 + \text{Arctan } \frac{1}{2x}$

Au voisinage de 0 : $\text{Arctan } x = x + o(x)$

On pose $x = 1/x$ alors $f(x) = \frac{1}{x} - \pi/2 + \text{Arctan } \frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \pi/2 + \frac{x}{2} + o(x)$

d'où $f(x) = x - \pi/2 + \frac{1}{2x} + o(1/x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \pi/2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} + o(1/x) = 0 \Rightarrow D: y = x - \pi/2$ est A.D en $+\infty$

$f(x) - (x - \pi/2) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc (C) est au dessus de D sur $]0, +\infty[$

f est impaire $\Rightarrow D': y = x + \pi/2$ est A.O en $-\infty$ et (C) est au dessous de D' sur $]-\infty, 0[$

Exercice 1 1/ $\frac{-2x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$; $a = +2$; $b = -4$; $\frac{-2x}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x-2}$

2/ (E') : $(x^2-3x+2)y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-2x}{x^2-3x+2} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + C$

$y_1 = K \frac{(x-2)^2}{(x-1)^4}$ est solution de (E')

• Posons $y_0 = K(x-1)^2(x-2)^{-4}$ solutions particulières de (E) on trouve $y_0 = \frac{(x-1)^2}{4}$

d'où $y = y_1 + y_0 = \frac{K(x-1)^2}{(x-1)^4} + \frac{(x-1)^2}{4}$

3/ a) $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1 - 3e^{2x}$: (E) est de type 2° ordre, linéaire à coefficients constants

(E') : $2y'' - 7y' + 3y = 0$, l'eq caractéristique $2r^2 - 7r + 3 = 0$, $\Delta = 25$

$r_1 = 1/2$, $r_2 = 3$; $y_1 = \alpha e^{x/2} + \beta e^{3x}$ sol de E'

b) y_0 solutions particulières de E s'écrit $y_0 = y_2 + y_3$ telles que y_2 et y_3 sont respectivement solutions de (E₁) : $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1$ et (E₂) : $2y'' - 7y' + 3y = -3e^{2x}$

$y_2 = ax + b$ et $y_3 = \alpha e^{2x}$; on trouve $y_2 = x + 1/3$; et $y_3 = e^{2x}$

d'où $y_0 = x + 1/3 + e^{2x}$

c) $y = y_0 + y_1 = x + 1/3 + e^{2x} + \alpha e^{x/2} + \beta e^{3x}$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..